I LINGUAGGI in generale ed il LINGUAGGIO DELL'ALGEBRA in particolare

Appunti delle lezioni tenute dal prof. Paolo Delise fino al 2005/06 e distribuiti gratuitamente con licenza Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike – Edizione rivista in data 06/06/2012

1. Prerequisiti ed obiettivi

Per poter affrontare lo studio di quest'unità l'allievo deve possedere nozioni di:

- Algebra

Alla fine dell'unità l'allievo sarà in grado di:

- Conoscere le caratteristiche dei linguaggi simbolici
- Tradurre da un linguaggio algebrico ad un altro un'espressione
- Impostare in linguaggio algebrico la soluzione di un problema

Rimando alla pagina web
http://www.delise.it/paolo/matematica

2. Il linguaggio

Quando noi parliamo sostituiamo agli oggetti, alle azioni, alle idee dei simboli ed operiamo su di essi.

Se io dico la parola "pizza" questo suono non ha nulla a che vedere con il sapore, il colore, il profumo dell'oggetto che la parola rappresenta, ma se dico questa parola, nella mente di ognuno di noi si fa vivo il concetto di qualcosa che non sarà identico per ognuno di noi (io penso alla pizza ai funghi, un altro alla pizza margherita, un terzo a quella che ha mangiato ieri, e così via), ma sostanzialmente ognuno di noi avrà in mente qualcosa che avrà le caratteristiche di un disco di pasta di pane, cotto al forno con qualche condimento sopra.

Un suono, una serie di sgorbi sul foglio di carta, *pizza*, è riuscito ad evocare in voi sapori, profumi ed altro. Questa è la caratteristica del linguaggio.

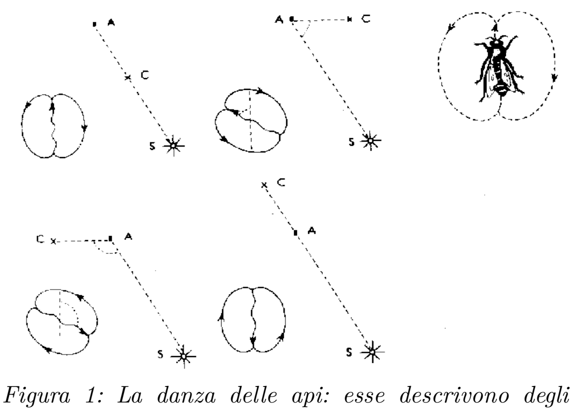

Figura 1: La danza delle api: esse descrivono degli otto con inclinazioni e versi differenti per indicare la direzione dei fiori rispetto al sole (S) ed all'alveare (A)

Il linguaggio non è caratteristico dell'uomo. Forme particolari di linguaggio sono state sviluppate da tutti gli animali che hanno una vita di branco. Le api, ad esempio, comunicano tra loro mediante delle danze, la posizione e la distanza dei fiori, le formiche comunicano tra di loro con l'emissione di sostanze odorose, dette feromoni. I cani comunicano tra di loro mediante una serie di segnali (posizione delle orecchie, della coda, ...) e così via.

Non fa parte, invece, del linguaggio degli animali, la capacità di parlare che hanno i pappagalli, le ghiandaie e gli altri uccelli dalla lingua carnosa: si tratta, in questo caso, di semplice imitazione.

3. La caratteristica dei linguaggi

Alla base dei linguaggi c'è una serie di operazioni di traduzione che è riportata in dettaglio nella figura 2:

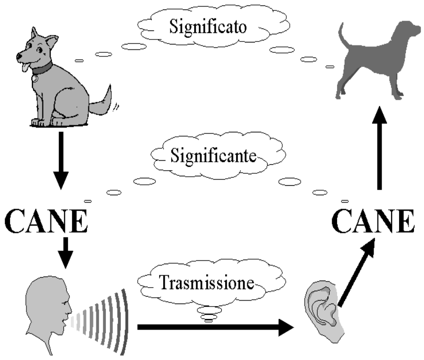

Figura 2

1. Chi vuole trasmettere un messaggio ha nella sua mente un *significato*, nella figura è una particolare idea di cane.
2. Chi vuole trasmettere il messaggio traduce la sua idea in una serie di simboli, ad esempio il suono della parola *cane* o i simboli grafici equivalenti, a seconda che il messaggio sia orale o scritto. Il messaggio così costruito viene detto *significante.*
3. Chi vuole trasmettere il messaggio fa in modo che i simboli del linguaggio vadano da lui a chi lo deve ricevere; griderà la parola *cane* oppure allungherà un foglio con la scritta *cane* e così via.
4. Chi riceve il messaggio recepisce dei simboli, e in base a quei simboli riconosce il significante *cane.*
5. Nella testa di chi ha recepito il messaggio, al significante cane corrisponde un particolare significato.

Nel nostro esempio, il significato di chi trasmetteva il messaggio era sostanzialmente lo stesso del significato di chi lo riceveva. Esisteva una sostanziale corrispondenza tra i due significati.

Figura 3: il cane di una antica arma da fuoco

Ma cosa sarebbe successo se chi riceveva il messaggio, esperto armaiolo, avesse fatto corrispondere alla parola cane, ciò che a lui era familiare, vale a dire il meccanismo di sparo di un'arma da fuoco. Non ci sarebbe stata più la corrispondenza ed il significato non sarebbe stato trasmesso integro.

Nei linguaggi umani c'è ampio spazio per le ambiguità di questo tipo. Ad esempio la parola pizza citata all'inizio può significare anche la scatola piatta e circolare in cui si custodisce un rotolo di pellicola; può significare, per estensione, la pellicola stessa e, infine, in modo figurato, una persona o cosa estremamente noiosa.

Esempi ed esercizi
Parole e frasi ambigue in due lingue diverse:

Italiano	***Frase o parola ambigua***	***Altra lingua***
Mi sembrò nero	**Mi parve nero**	Latino: *"oh mio piccolo Nerone"*
I romani hanno degli allevamenti di bellissimi vitelli	**I vitelli dei romani sono belli**	Latino: *"Va o Vitellio al suono della guerra del dio romano"*
È quell'insetto che produce il miele	**Ape**	Inglese:
È la stagione in cui non si va a scuola	**Estate**	Inglese:
Un derivato del latte	**Burro**	Spagnolo:

Individuate le ambiguità delle seguenti frasi (per le ultime due ringrazio Giorgio Dendi):

Una vecchia porta la sbarra

Guardava il vigile nella piazza col cannocchiale

Mezzo minuto di raccoglimento

Messa per i caduti

L'uomo ha sviluppato il linguaggio a livelli molto raffinati usando dei simboli elementari, come possono essere i suoni semplici o i simboli grafici dell'alfabeto per costruire messaggi estremamente complessi. Ma l'uomo ha sviluppato anche numerosissimi altri linguaggi. Si pensi ad esempio al linguaggio dei gesti, nel quale gli italiani eccellono, ed alla complessità dei messaggi che si possono trasmettere con essi.

Due tipi di linguaggio sono legati, ad esempio, alla musica. Posso usate la musica come linguaggio per trasmettere con dei suoni, sensazioni e stati d'animo,... Ma la musica ha anche bisogno di un linguaggio per essere descritta, ed abbiamo il linguaggio della notazione musicale, con la quale il compositore spiega all'esecutore come deve eseguire la musica che egli ha pensato.

E così via.

Alla base di ogni linguaggio ci sono:

1. Un *alfabeto,* vale a dire un insieme di simboli di base
2. Una *grammatica*, vale a dire un'insieme di regole per combinare tra di loro i simboli di base in frasi
3. Una *semantica*, vala e dire un insieme di regole per attribuire un significato alle frasi.

Le frasi ambigue proposte prima, sono scritte nel linguaggio noto come *lingua italiana.* La lingua italiana ha un alfabeto composto da 26 simboli alfabetici di base più alcune decine di altri simboli (le cifre numeriche, i segni di interpunzione, i caratteri accentati, ...). Ne avete studiato la grammatica, che si divide in morfologia e sintassi. La grammatica della lingua italiana è, come tutte le lingue umane, molto complessa ed è *sensibile al contesto*, vale a dire che, per sviluppare un'analisi grammaticale, è necessario comprendere anche il significato delle frasi (semantica).

Le frasi proposte sopra, sono tutte grammaticalmente corrette; sono però semanticamente ambigue ed alcune modificano profondamente la struttura grammaticale a seconda del significato.

Esercizi:

- *Date con le vostre parole la definizione di semantica; cercate sul vocabolario la definizione; sforzatevi di comprenderla e se non la comprendete, chiedete spiegazioni all'insegnante.*
- *Nel linguaggio delle api descritto inizialmente, cos'è l'alfabeto, quale è la grammatica?*

4. I linguaggi della matematica

Anche la matematica ha sviluppato molti linguaggi, che le sono serviti per descrivere determinati ambienti. Talvolta un particolare linguaggio viene detto, in matematica, *formalismo.* Voi avete studiato, in questi anni, un linguaggio particolare, il *linguaggio algebrico,* che è il linguaggio usato per *descrivere la soluzione dei problemi.*

Il linguaggio algebrico non è nato così come lo studiate voi, ma si è sviluppato nel corso dei secoli. È un linguaggio in cui è bandita ogni ambiguità semantica: *ogni frase che voi scrivete, se grammaticalmente corretta, ha un significato ed uno solo*. La sua dipendenza dal contesto è molto blanda, ed ampliando il concetto di alfabeto è possibile renderlo quasi indipendente da esso.

Nell'algebra l'alfabeto è composto dalle lettere, dagli operatori matematici +, -,... da altri simboli speciali come le parentesi, la radice quadrata,... Può fare comodo includere nell'alfabeto stesso anche alcune parole come *log*, *ln*, *sin*, *cos*, ... Lo studio della grammatica e della semantica è stato l'oggetto di studio degli ultimi tre anni di matematica.

5. Il linguaggio algebrico: l'alfabeto

Anche se per voi l'algebra è stata spesso un esercizio in cui, al di fuori da ogni contesto, si doveva passare da una certa espressione ad un'altra, in realtà la funzione dell'algebra è quella di descrivere in maniera chiara e non ambigua come risolvere un problema particolare.

Vediamo di dare una descrizione formale di questo linguaggio studiandone preliminarmente l'alfabeto.

Come già visto prima, l'alfabeto è l'insieme dei simboli usati dal linguaggio. Nel linguaggio dell'algebra i simboli vengono usati, quasi sempre, con significati particolari. Pertanto li abbiamo raggruppati per categorie. Esistono, inoltre, altri simboli che non sono riportati.

SIMBOLI NUMERICI o CIFRE: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

SIMBOLI LETTERALI: a b c d ... z [A B C ... α β γ ... π ...]

Nei simboli letterali ho chiuso tra parentesi quadre i simboli A B C ... α β γ ... π ... in quanto usati più di rado, a parte il simbolo π, e solo in condizioni particolari.

OPERATORI e SEPARATORI: . , + - · : — √ ... {[( )]} ± ! | x^y x_y ... % ∂ '

Abbiamo indicato con x^y l'operazione di innalzamento a potenza per la quale non esiste un simbolo vero e proprio, ma solo una tecnica di scrittura (quindi piuttosto una regola grammaticale); lo stesso dicasi per l'indicizzazione x_y. Alcuni linguaggi di programmazione usano, per l'innalzamento a potenza, l'operatore ^ ed altri il simbolo **, ma non il linguaggio algebrico tradizionale.

PREDICATI: = > < ≥ ≤≠ ...

Con il termine predicati indico dei simboli che rappresentano delle azioni, dei verbi: è uguale, è maggiore, ...

NOMI: sen cos, tan log ...

6. Le regole grammaticali

Un'espressione algebrica è costituita, di solito, da numeri o simboli letterali, che sottintendono dei numeri, legati tra di loro da operatori e, quasi sempre, da un predicato.

Gli operatori possono essere, a seconda del loro modo di operare, *prefissi, infissi o postfissi*.

È un operatore *prefisso*, ad esempio il segno - che si premette ad un numero o un simbolo rappresentante un numero; esso precede l'entità su cui opera: -a invita a considerare l'opposto di a; è prefisso anche il simbolo √: $\sqrt{x}$ invita a considerare quel numero che moltiplicato per se stesso da x[1].

Sono operatori *infissi* quelli che rappresentano, ad esempio, le quattro operazioni, l'innalzamento a potenza, e così via.

Sono operatori *postfissi* % e !. Quest'ultimo ancora non lo avete incontrato, ma il sua significato è molto semplice: si applica soltanto a numeri interi e quando incontrate la scrittura 5!, essa significa 1·2·3·4·5, vale a dire 120. L'algebra se ne è impossessata, naturalmente, anche per il calcolo letterale e n! significa il prodotto dei primi n numeri. Anche l'apostrofo è un operatore postfisso, ma ne parleremo in quarta.

Gli operatori infissi sono *binari*, operano cioè su due elementi, quello che sta alla loro destra e quello che sta alla loro sinistra. Gli operatori prefissi o postfissi sono *unari*, operano cioè su un elemento solo, quello che sta, rispettivamente, alla loro destra (prefissi) o alla loro sinistra (postfissi).

Vale la pena notare come ci siano operatori che hanno più significati a seconda del modo in cui vengono usati. Il segno meno può essere infisso o prefisso. Il primo indica un'operazione tra due numeri, il secondo prende il numero opposto a quello che sta alla sua destra. Anche il simbolo di radice √ può essere solo prefisso ed ha il significato di radice quadrata o infisso $\sqrt[n]{x}$ ed allora significa una radice di ordine diverso. Quando un operatore assume significati diversi se usato in contesti diversi si parla, talvolta, di sovraccarico (*overloading*) di significati. Poiché nel linguaggio algebrico non ci può essere posto per ambiguità, deve essere sempre possibile comprendere di quale operatore si tratti.

Gli operatori, nel linguaggio algebrico tradizionale, sono caratterizzati da *precedenze*. Voi sapete già che nell'operazione 1+2·3–4:5 prima dovete eseguire le moltiplicazioni e le divisioni e poi le somme e sottrazioni.

In generale si applicano le seguenti regole:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{3^2}:2}+\underbrace{2\cdot 5}}$$

1. Si calcolano per primi gli operatori postfissi !, % e l'operatore prefisso radice quadrata √.
2. Si eseguono gli innalzamenti a potenza e l'operatore infisso radice ennesima ^{n}√x.
3. Si esegue l'operatore prefisso -. Ricordiamo ancora che -x ha un significato diverso da quello della sottrazione y-x. Il primo è un operatore unario, il secondo è binario.
4. Si eseguono poi le moltiplicazioni e le divisioni
5. Da ultime si eseguono le addizioni e le sottrazioni.

Se l'ordine di esecuzione delle operazioni deve essere modificato, si usano le parentesi. Van-

1 In molte calcolatrici con il sistema operativo algebrico, le radici quadrate e tutte le funzioni precodificate (exp, log, sin, cos) sono postfisse anziché prefisse.

no sempre eseguite prima le operazioni racchiuse tra parentesi[2].

$$3+5\cdot 2=13 \qquad (3+5)\cdot 2=16$$

Vale la pena notare che non tutte le calcolatrici usano il sistema di precedenza algebrico; le più semplici eseguono le operazioni nell'ordine in cui sono scritte e la scrittura, senza parentesi di $3+5\cdot2$ darà come risultato 16. Poiché nel corso del triennio si farà un certo uso della calcolatrice, chi dovesse comperarne una nuova farà bene a verificare che $3+5\cdot2$ dia 13 e non 16. Se ne trovano a costi contenutissimi. Chi avesse già una calcolatrice con la quale $3+5\cdot2$ dà 16, non deve buttarla via. Basta che ne sia conscio ed esegua le operazioni seguendo le giuste precedenze.

Esercizi

- *Prendete la vostra calcolatrice e determinate se: usa il sistema operativo algebrico o no; se ha la radice quadrata prefissa o postfissa;*
- *Calcolate le seguenti espressioni rispettando le regole di precedenza algebrica:*

$$3+\frac{10}{5}-1 \qquad -3-4\frac{42}{7}+3\cdot 2 \qquad -1^2+1-1+1 \qquad 3\cdot 5^2-5 \qquad 3+2-2^4\cdot 10$$

- *Evidenziate l'ordine in cui vanno calcolate le seguenti espressioni*

$$3+2\cdot a-3\cdot b \qquad 4\cdot a-a+3\cdot a \qquad -4\cdot a^2+3\cdot a \qquad \frac{-3}{2}\cdot a^4+2\cdot a-2 \qquad \frac{3^2}{2^3}\cdot a-1$$

Nel linguaggio algebrico tradizionale, alcuni operatori (il segno di frazione e quello di radice) svolgono anche la funzione implicita di parentesi.

$$3+\frac{2a+b}{2a-b}=3+\left[\frac{(2a+b)}{(2a-b)}\right] \qquad \sqrt{2a+1}=\sqrt{(2a+1)} \qquad 3+\frac{\dfrac{2a}{a+b}}{\dfrac{a}{a-b}} = 3+\left\{\frac{\left[\dfrac{(2a)}{(a+b)}\right]}{\left[\dfrac{a}{(a-b)}\right]}\right\}$$

Poiché diamo una precedenza maggiore alle moltiplicazioni e divisioni rispetto alle addizioni e sottrazioni, possiamo pensare l'espressione algebrica come composta da gruppi di elementi legati al loro interno dalla moltiplicazione o divisione e sommati tra di loro.

$$2a+3ab+\frac{1}{2}ab^2$$

Un gruppo di elementi legati tra di loro da moltiplicazioni o divisioni e nei quali la moltiplicazione è, addirittura, sottintesa, si dice **monomio**. Quando abbiamo una sequenza di monomi legati tra di loro da operazioni di addizione e sottrazione, diremo che siamo in pre-

2 Nei testi di matematica elementare si fa largo uso di tre livelli di parentesi, tonde, quadre e graffe. Poiché non bisogna mai porre limiti alla divina provvidenza e potrebbe esserci la necessità di avere più di tre livelli di parentesi, nei testi di matematica superiore e nella scrittura delle formule per il calcolatore si usano solo le parentesi rotonde: la lettura è un po' più difficoltosa, ma non c'è pericolo di ambiguità se la formula è scritta correttamente: ad ogni parentesi aperta corrisponde la sua chiusa e due parentesi sono corrispondenti se nell'espressione da esse racchiusa è zero la somma algebrica delle parentesi aperte (+1) e delle parentesi chiuse (-1).

senza di un **polinomio**[3]. Se abbiamo due monomi soli con un'operazione di somma o sottrazione, diremo che abbiamo un **binomio**. Se abbiamo tre monomi legati da due operazioni di somma o sottrazione, diremo che abbiamo un **trinomio**.

7. La torre di Babele

Narra la Bibbia che gli uomini vollero costruire una torre così alta da arrivare fino al cielo e che per punirli Dio diede ad ognuno una lingua diversa e non si intesero più. Sembra incredibile come questa situazione si verifichi continuamente. Anche in un ambito così ristretto e semplice come il linguaggio algebrico, l'uomo ha sviluppato molti dialetti, uno dei quali, usato dai vostri libri di testo, è quello noto a voi.

Questo modo di scrivere le formule non è, però, l'unico. Se volete scrivere un'espressione algebrica in modo che il calcolatore la possa intendere, dovete scriverla in una forma diversa, la cosiddetta scrittura lineare, in cui cioè, le espressioni si sviluppano su una riga sola e non su più piani. Di solito, poi, in questa forma, le parentesi sono tutte rotonde e per innalzare una potenza o usate dei simboli (sono molto diffusi ^ o ** infissi tra base ed esponente) o usate delle funzioni (pow(b, e); pow sta per power, b per base ed e per esponente). Useremo l'accento circonflesso ^ che attualmente è il più diffuso.

In questo linguaggio, la formula

$$3+\frac{2a^2+b}{2a-b}$$

diventa 3+(2*a^2+b)/(2*a-b), nella quale si è messa in evidenza anche la moltiplicazione implicita (2a) con l'asterisco. La formula

$$3+\frac{\frac{2a}{a+b}}{\frac{a}{a-b}} \qquad (1)$$

diventa 3+((2*a/(a+b))/(a/(a-b)), nella quale si è omessa la parentesi per raccogliere 2a in quanto il risultato non cambia. È evidente la minor leggibilità di questa scrittura. Siccome, però, essa è usata nella programmazione dei calcolatori, è quanto mai opportuno abituarsi a tradurre le formula da un linguaggio all'altro.

Esercizi:

- *Scrivete in scrittura lineare le seguenti espressioni:*

$$3a\frac{1+b}{b}+2\frac{\frac{3a-1}{2a+1}}{a} \qquad \sqrt{\frac{2a+1}{2a-1}} \qquad 3\frac{2a+\frac{2a+1}{2a-1}}{\frac{a-1}{a+1}}-\frac{2a}{a+1}$$

- *Scrivete in scrittura lineare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.*

3 È una visione riduttiva del polinomio, che però ben si adatta alle nostre necessità. Lascerò ai corsi universitari la definizione formale di polinomio.

- *Prendete il libro di matematica che avevate in prima (va bene anche quello di terza se trovate espressioni algebriche complesse) e convertite le espressioni algebriche in scrittura lineare.*

Come già accennato in una nota, molte calcolatrici usano il cosiddetto sistema operativo algebrico, nel quale le regole di precedenza degli operatori sono rispettate; alcuni operatori, però, come √, ma anche le funzioni log, sin, ... anziché essere prefissi, sono postfissi.

Un matematico polacco, Jan Lukasiewicz, pensò che era molto irrazionale avere operatori infissi, postfissi, prefissi, con diverse precedenze e livelli di parentesi, ed inventò, nel 1920, un linguaggio algebrico completamente diverso, in cui tutti gli operatori sono postfissi, alcuni si applicano ai due numeri che li precedono, altri ad uno solo e sono tutti senza parentesi. Basta soltanto aggiungere un comando (che viene rappresentato col simbolo ↑ e viene detto *Enter*) per separare la fine di un numero e l'inizio del successivo quando non ci sono operatori tra i due.

Dovendo eseguire un'addizione a+b, si scriverà a ↑ b +; dovendo calcolare a+2b si scriverà a ↑ 2 ↑ b * +. Si è usato il simbolo * per la moltiplicazione per evitare confusioni con la x o con i punti e si userà il simbolo ÷ per la divisione. Si noti, nell'ultima formula, la sequenza di due operatori *+, caratteristica di questo modo di scrivere le formule.

La formula (1) precedente, con le frazioni doppie, diventa:

3 ↑ 2 ↑ a * a ↑ b + ÷ a ↑ a ↑ b - ÷ ÷ -

La formula può sembrare astrusa ed incomprensibile. Proviamo allora a visualizzare le operazioni usando quella che viene comunemente detta una catasta o *stack.* Ogni operatore opera con un metodo LIFO (*Last In First Out*) sul primo simbolo della catasta, se è unario, sui primi due, se è binario; in questo secondo caso il contenuto della catasta viene, in seguito all'operazione, compattato verso l'alto.

3	↑	***2***	↑	***a***	*****	***a***	↑	***b***	***+***	÷	***a***	↑	***a***	↑	***b***	**-**	÷	÷	**-**
3		2		a	2a	a		b	a+b	$\frac{2a}{a+b}$	a		a		b	a-b	$\frac{a}{a-b}$	$\frac{\frac{2a}{a+b}}{\frac{a}{a-b}}$	$3+\frac{\frac{2a}{a+b}}{\frac{a}{a-b}}$
	3	3	2	2	3	2a	a	a	2a	3	$\frac{2a}{a+b}$	a	a	a	a	a	$\frac{2a}{a+b}$	3	
			3	3		3	2a	2a	3		3	$\frac{2a}{a+b}$	$\frac{2a}{a+b}$	a	a	$\frac{2a}{a+b}$	3		
							3	3				3	3	$\frac{2a}{a+b}$	$\frac{2a}{a+b}$	3			
														3	3				

Questo metodo di scrittura delle formule algebriche venne introdotto negli anni '70 nelle calcolatrici scientifiche della Hewlett Packard® ed oggi è caduto in disuso, essendosi diffuso il cosiddetto sistema operativo algebrico. Ma in realtà tutti i calcolatori, quando devono calcolare una formula, prima la traducono dal sistema operativo algebrico in questa notazione polacca rovesciata (RPN, *Reverse Polish Notation*, per gli amici) per cui può essere utile addestrarsi all'uso di questa scrittura.

Provate a scrivere in forma RPN le formule proposte come esercizio per la scrittura lineare.

8. La scrittura dei numeri

Nelle espressioni algebriche non troviamo solo lettere, ma anche numeri.

Dobbiamo, intanto, distinguere tra un numero e la sua rappresentazione.

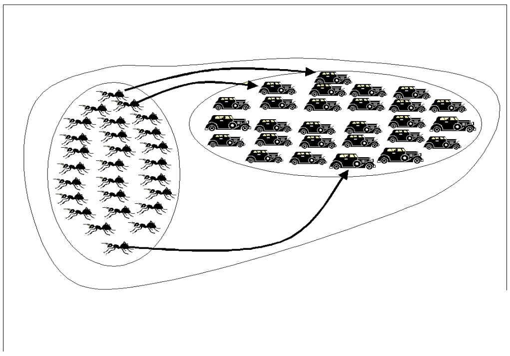

Figura 4

Cos'è un numero? Cosa hanno in comune 27 formiche e 27 automobili? Quando tra due insiemi (nel nostro caso di formiche ed automobili) possiamo istituire una corrispondenza biunivoca, che ad ogni diversa formica faccia corrispondere una diversa automobile e viceversa, diremo che i due insiemi hanno la stessa *cardinalità*. La caratteristica che accomuna tutti gli insiemi possibili che hanno la stessa cardinalità si dice *numero cardinale*.

Non dobbiamo confondere il numero con la sua rappresentazione:

27 XXVII VENTISETTE 33_8 $1A_{16}$ 11011_2

sono alcune delle possibili rappresentazioni del numero 27.

Quando noi scriviamo un numero seguiamo certe regole di linguaggio che fanno sì che 3,14 sia una scrittura corretta e che 3,,14 no. Cerchiamo di esplicitare queste regole.

Chiamiamo

CIFRA un simbolo scelto tra 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

SEGNO un simbolo scelto tra + -

Osserviamo ora la figura 5; le linee rappresentano un ipotetico percorso che inizia a sinistra e termina a destra della figura. I percorsi che possiamo seguire sono molteplici. Possiamo prendere la strada del segno o tirare dritti; poi dovremo scegliere una cifra; scelta la cifra potremo proseguire o ritornare a prenderne un'altra. Potremo, poi, concludere il numero o inserire una virgola ed altre cifre.

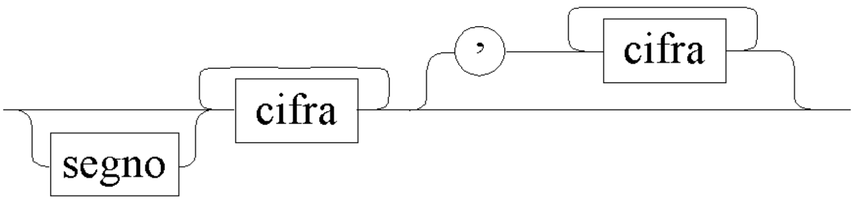

Figura 5

Usando il grafo sintattico qui sopra, provate a dire quali delle seguenti scritture sono dei numeri scritti correttamente e quali no.

125	-73	+-12	73,0	22.14	3:12	±2
0,12	1.325.000	007	00,7	12 13	3,0000	12,0,0
3,3	3,333...	7500000000	29/2/1998	-1712	+14,0123	,322
322,2	322,	$0,\overline{3}$				

Se avete svolto gli esercizi correttamente avrete trovato che alcune delle scritture sembrano corrette, ma non lo sono secondo le regole grammaticali proposte, che sono un po' più restrittive rispetto a quelle usate in pratica. Se avete dei dubbi qui sotto trovate le risposte.

Sono tutti corretti, tranne +-12, 22.14 (la grammatica preevede la virgola e non il punto), 3:12, ±2, 1.325.000 (che è corretto, ma non nella nostra grammatica; i potrebbe ampliarla ma la descrizione diventerebbe molto complicata). Sono corretti, anche se strani, 007 e 00,7, non lo è 12 13 e nemmeno 12,0,0. Nemmeno 3,333... è corretto perché non sono previsti i puntini. Provate ad aggiungerli alla grammatica, è facile. Altrettanto facile è rendere regolare la scrittura ,322 che, ancorché brutta, viene accettata dalle calcolatrici. Non è corretto 29/12/1998 e 0,3 periodico.

Ci sono altri modi per scrivere i numeri. Ad esempio quello che, forse, avrete visto fare sugli assegni:

TREMILASETTECENTOTRENTADUE

Sapreste definirne la grammatica in base alla quale TREMILASETTECENTOTRENTADUE è corretto e TREMILASETTECENTOVENTIDODICI no? È abbastanza complesso; vediamo come si procede.

Intanto useremo delle ellissi per identificare quelli che sono gli elementi di base del linguaggio: UNO, DUE, MILLE, MILA,... li scriveremo entro delle ellissi. Racchiuderemo in rettangoli, invece, come fatto prima, delle ulteriori regole di combinazione degli elementi di base.

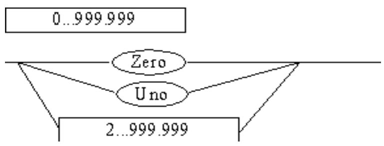

Figura 6

Nella scrittura della nostra grammatica ci limiteremo ai numeri da ZERO a NOVECENTONOVANTANOVEMILANOVECENTONOVANTANOVE (con gli euro, basta ed avanza!). Notiamo subito che ZERO ed UNO hanno un ruolo differente dagli altri numeri: non si dice UNOMILA, ma MILLE, e così via. Pertanto la regola andrà scritta come mostrato nella figura 6, discriminando il caso uno dagli altri. Un numero o si scrive con la parola ZERO, o con la parola UNO o con le parole con cui si compongono i numeri da 2 a 999.999. Vediamo allora la regola per questi ultimi.

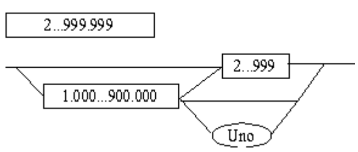

Figura 7

Il grafo della figura 7 ci dice che un tale numero si può scrivere o come un numero tra 2 e 999, o come un numero con le migliaia seguito da nulla, da un UNO o da un gruppo che va da 2 a 999. Questo grafo lascia non definiti i numeri da 2 a 999 e le migliaia.

Sarà nostro compito continuare nelle definizioni, fino alla completa definizione dell'intera grammatica.

Riporto i grafi senza ulteriori commenti ed invito ad estendere la grammatica per includere anche i milioni, e se volete, anche i miliardi.

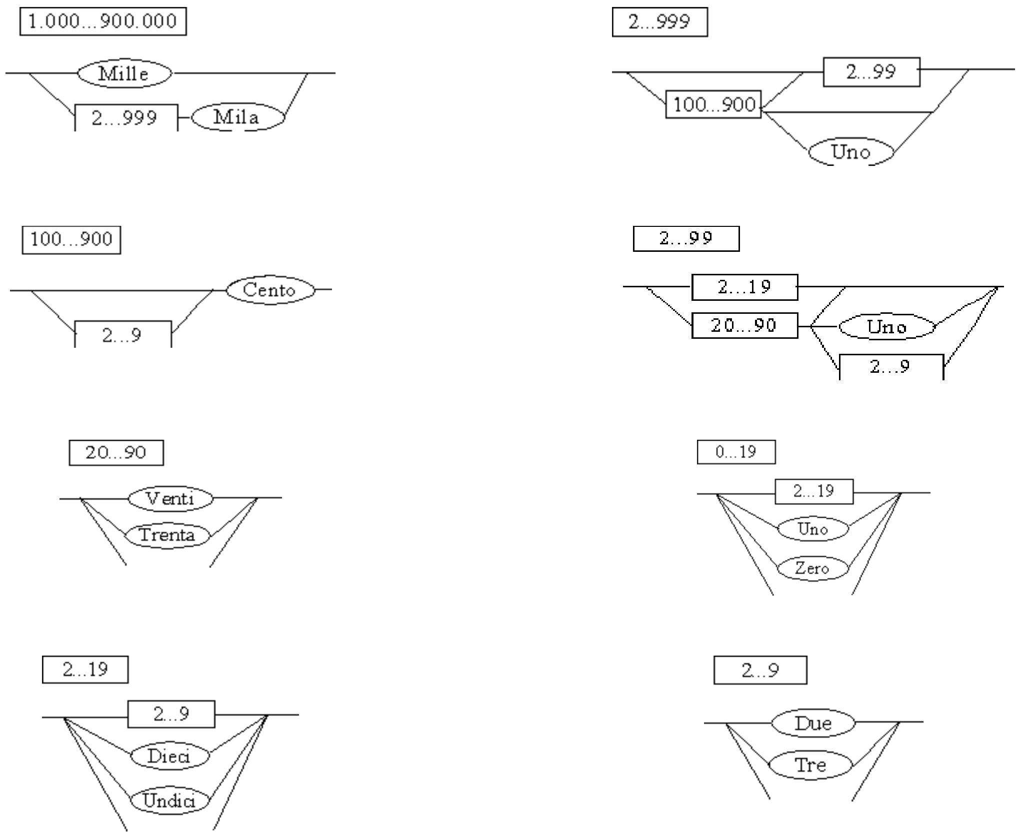

Tabella 1

Vale la pena notare come tutte le regole scritte nei rettangoli abbiano un grafo che le definisce e come l'ultimo grafo ne sia privo: la regola 2...9 contiene soltanto elementi primitivi.

Ho chiamato elementi primitivi ZERO, UNO, DUE, MILLE, ... ma avrei dovuto chiamarli *alfabeto* in quanto sono i simboli fondamentali di questo linguaggio. Non l'ho fatto per non creare confusione.

9. La semantica della scrittura dei numeri

Abbiamo visto le regole per scrivere in modo grammaticalmente corretto un numero. Ma qual è il significato della scrittura 27, o per andare sul difficile 72? Perché il numero 2 ha nei due numeri scritti un significato così diverso?

Nella scrittura con i numeri romani X vuol dire sempre 10; nella scrittura con i numeri arabi no. Ogni cifra ha un significato (semantica) diverso a seconda della posizione che occupa. Lo sapete dalle elementari che la cifra più a destra conta le unità, quella che le sta a fianco, i gruppi di dieci unità che si possono contare e così via. Il numero 1243 sottintende, in realtà, la scrittura

$$1\cdot 1000+2\cdot 100+4\cdot 10+3=1\cdot 10^3+2\cdot 10^2+4\cdot 10^1+3\cdot 10^0$$

Viene spontaneo chiedersi, allora, perché raggruppare a decine e non a dozzine, cinquine, ventine, e così via. In realtà il numero 10 non ha niente di speciale e potrebbe effettivamente essere sostituito da altri numeri. Il numero che si usa per raggruppare la scrittura viene detto *base*; nella lingua francese, ad esempio, c'è un ricordo di una numerazione in base 20 e 92 si legge *quatre-vingt-douze* (quattro-venti-dodici).

Per rappresentare un numero in una base particolare è necessario avere un numero di simboli pari alla base: 2 in base 2 (0 ed 1), 8 in base 8 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), 16 in base 16 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) ad ognuno dei quali viene assegnato un valore particolare. 10 rappresenta sempre la base. Se la base è diversa da 10, in basso a destra del numero si indica la base usata (in base 10). Così 32_{10} diventa 20_{16} o 40_8 o, infine, 100000_2. Infatti

$$32_{10}=3\cdot 10^1+2\cdot 10^0=2\cdot 16^1+0\cdot 16^0=4\cdot 8^1+0\cdot 8^0=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0$$

Se volete provare a scrivere il numero 1430 in base 16, vi consiglio di lavorare così:

1. Calcolate quoziente e resto della divisione del numero per la base.
2. Il resto rappresenta le unità nella nuova base.
3. Calcolate il quoziente e resto della divisione del quoziente per la base.
4. Il resto rappresenta le decine.
5. Continuate così per trovare le centinaia, le migliaia,... fintanto che il quoziente non diventa 0

Allora troverete che $1430_{10}=596_{16}$, $8972_{10}=21414_8$, $43794_{10}=AB12_{16}$ e $2872_{10}=101100111000_2$.

Ancora una domanda: per quale motivo usiamo, nella vita quotidiana, un sistema con 10 simboli? Quanti più simboli usiamo tanto più piccole sono le rappresentazioni dei numeri (lo vediamo con 43794). Ma quanti più simboli ci sono, tante più regole dobbiamo apprendere per la somma e, soprattutto, per il prodotto. 10 simboli è un buon compromesso, anche se il motivo per cui ne abbiamo scelti 10 e non 9 o 11 è dovuto, probabilmente, al fatto che abbiamo 10 dita. Il calcolatore, che di "dita" ne ha 2 (acceso o spento), usa il sistema binario in base 2 e, siccome per comunicare con gli umani il sistema in base 2 è un disastro (basta guardare quanto è lungo il numero 2872 scritto in base 2), ma la conversione in base 10 richiede un certo numero di calcoli, qualche volta il calcolatore preferisce usare la base 16 o la base 8.

Se invece vi chiedete perché non si è continuato ad usare i numeri romani, provate a calcolare, a penna 12 per 13 e poi XII per XIII e comprenderete perché i mercanti europei ed in particolare italiani, introdussero le cifre arabe. Il merito va, principalmente a Leonardo Fibonacci, pisano, vissuto tra il 1170 ed il 1240.

10.Qualche esercizio

- I*l codice della strada prevede un linguaggio con cui comunicare agli automobilisti pericoli, obblighi e divieti mediante segnali luminosi, acustici o grafici. Individuatene alcuni per ogni categoria e definite cosa si intende per alfabeto e cosa per regole grammaticali in questo linguaggio.*

- Nel linguaggio delle api (mostrato nella figura 1 a pagina 1) individuate l'alfabeto e la grammatica.
- *Ordinate i seguenti numeri, scritti tutti in base 16, senza effettuare prima la conversione in base 10.*

1000; 472; 1; A1; F0A; 324; F; 723; 1A; A00

11.Dal problema pratico all'algebra

Finora, per voi, l'algebra è coincisa, spesso, con esercizi astratti di trasformazione di un'espressione in modo che, nel rispetto della grammatica, la semantica rimanesse la stessa. Vediamo ora di definire uno schema di lavoro per passare da un problema pratico, concreto, descritto a parole, alla descrizione della sua soluzione in linguaggio algebrico.

Descrizione della soluzione di un problema

1. Individuare i **dati noti** del problema ed assegnare loro un nome (di solito di una lettera).
2. Individuare le **grandezze incognite** chiamandole con un nome (di solito di una lettera).
3. Scrivere le formule che descrivono la soluzione del problema.

   Le formule hanno di solito:
   - un soggetto (una grandezza incognita
   - un predicato (di solito =)
   - una formula o, più in generale, un algoritmo[4] che descrive la soluzione

Vediamo un esempio:

Durante questo quadrimestre verrete valutati con due voti orali. Il voto finale sarà uguale alla somma dei voti divisa per il numero dei voti. Descrivete la soluzione del problema.

Dati noti:

a: primo voto
b: secondo voto
2: numero delle valutazioni

Vale la pena notare come anche il numero 2 faccia parte dei dati noti; potrebbe essere 3, in contesti diversi e comunque anche a e b assumeranno, all'atto della soluzione del problema, un valore numerico. La decisione se usare un particolare valore numerico (2) o un simbolo (n ad esempio) cui assegnare un particolare valore all'atto del calcolo a volte può essere molto importante per la leggibilità e la estensibilità delle soluzioni a problemi diversi (portabilità della soluzione).

4 La parola algoritmo deriva dal nome del matematico arabo *al-Khwarizmi* (autore del libro *al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa al-muqābala,* Trattato sul calcolo per completamento e bilanciamento. La parola completamento *al-ğabr* ha dato il nome all'algebra) e significa un qualunque schema o procedimento sistematico di calcolo. In altre parole, esso è la descrizione delle operazioni da compiere per risolvere un problema. Esso deve essere scritto in un linguaggio non ambiguo; ogni singolo passaggio deve concludersi in un tempo finito e l'intera successione dei passaggi deve avere fine. La parola nacque nel Medio Evo, ma è assurta a grande popolarità con l'avvento dei calcolatori elettronici. L'algoritmo scritto perché possa essere eseguito da un calcolatore elettronico si dice programma di calcolo, ma vorrebbero essere degli algoritmi tutte le istruzioni per l'uso.

Incognite:

o: voto orale finale da calcolare

Descrizione della soluzione (o algoritmo):

$$o=\frac{a+b}{2}$$

Provate a risolvere qualche altro esercizio:

Durante il quadrimestre, verrete valutati anche con tre prove scritte. Il voto scritto finale sarà la media aritmetica delle tre valutazioni conseguite. Calcolate il voto scritto finale.

1. Alla fine dell'anno il voto è unico. Per trovarlo dovrete calcolare la media aritmetica dei voti orali, la media aritmetica dei voti scritti e fare la media aritmetica delle due medie calcolate.
2. Durante la stagione dei saldi un negozio pratica il 20 % di sconto sui prezzi di listino. Quale sarà lo sconto che vi verrà praticato su un generico prodotto di cui conoscete il prezzo.
3. Partendo dall'esercizio precedente descrivete la soluzione del problema di calcolare il prezzo scontato di un generico prodotto di cui conoscete il prezzo e sul quale vi viene praticato lo sconto del 35 %.
4. In un negozio comperate due paia di jeans, tre t-shirts ed un maglione. Vi sono noti i prezzi di ogni pezzo, sui quali vi viene praticato lo sconto del 25%. Impostate la soluzione del problema di calcolare la spesa complessiva.
5. L'imposta sul reddito delle persone fisiche (IRPEF) prevede che chi ha un reddito minore o uguale a 15.000.000 paghi un'imposta pari al 18,5% del reddito. Calcolate l'imposta per un reddito inferiore a 15.000.000 ed il reddito.
6. L'IRPEF per chi ha un reddito compreso tra i 15.000.000 ed i 30.000.000 è pari al 18,5 % di 15.000.000 cui si somma il 26,5% del reddito della parte eccedente i 15.000.000. Impostate il calcolo dell'imposta per un reddito maggiore di 15.000.000 ma minore di 30.000.000.
7. Gli intervalli 15.000.000, 30.000.000 si chiamano scaglioni, le percentuali si chiamano aliquote. Ogni anno gli scaglioni e le aliquote cambiano. Impostate la soluzione del problema lasciando non specificate le aliquote e gli scaglioni, che rappresenterete con lettere opportune.
8. In un'urna ci sono i 90 numeri della tombola. Potete estrarre tre numeri in molti modi: potete effettuare l'estrazione, guardare il numero e poi rimetterlo dentro, oppure lasciarlo fuori; potete considerare l'estrazione 1 2 3 identica o diversa dall'estrazione 3 2 1. Per ognuno di questio modi, quante sono le possibili estrazioni? *(questo problema apre il capitolo del calcolo combinatorio e chiude questo).*