SPAZI VETTORIALI E ALGEBRA DELLE MATRICI

Appunti delle lezioni tenute dal prof. Paolo Delise e distribuiti gratuitamente con

Premessa

La necessità di questa unità didattica nasce dal fatto che il programma di matematica dei ragionieri programmatori prevede che si affronti l'argomento degli spazi vettoriali. Per ragioni contingenti, però, le conoscenze di fisica dei futuri ragionieri sono, spesso, modeste.

Rimando alla pagina web
http://www.delise.it/paolo/matematica

Dopo aver trattato, di conseguenza, per alcuni anni l'argomento in maniera assolutamente astratta, ho pensato (con la guida del testo di Kemeny, Snell e Thompson, Matematica ed attività umane, ed. Feltrinelli) di far riferimento ad altre realtà che potevano essere ricondotte agli spazi vettoriali ed all'algebra delle matrici per venire incontro alle esigenze di concretezza che i miei studenti continuavano ad avere.

Questa è la traccia delle lezioni.

0 - Prerequisiti ed obiettivi

Quest'unità didattica richiede, da parte dell'allievo, il possesso delle seguenti abilità:
- Conoscenza e capacità di applicare le nozioni di teoria degli insiemi
- Conoscenza e capacità di applicare le nozioni relative alle strutture algebriche

Alla fine di questa unità l'allievo sarà in grado di:
- Definire uno spazio vettoriale.
- Riconoscere l'esistenza di problemi modellizzabili con vettori.
- Riconoscere l'importanza delle applicazioni lineari e della loro rappresentazione mediante matrici.
- Acquisire dimestichezza con il calcolo matriciale.
- Risolvere problemi che richiedono l'uso di vettori e matrici.

1 - Definizione di spazio vettoriale

In matematica lo spazio vettoriale è una struttura algebrica particolare. Essa coinvolge due insiemi, lo spazio vettoriale E ed un corpo K, collegandoli tra loro con una legge di composizione esterna[1]. Per distinguere gli elementi dei due insiemi si usa scrivere un elemento dello spazio vettoriale con una freccia sopra alla lettera che lo rappresenta. Per semplicità tipografica noi, invece, sottolineeremo gli elementi dello spazio vettoriale: $\underline{a}$ rappresenterà un vettore, che nei libri di testo, di solito è scritto $\vec{a}$.

[1] Dati due insiemi A e B ($a \in A$ e $b \in B$ e $b' \in B$) si dice legge di composizione esterna un'applicazione che ad ogni elemento (a,b) $\in A \otimes B$ associa un elemento $b' \in B$.

Definizione:

Dati un insieme E ed un corpo K si dice che E è uno spazio vettoriale sul corpo K se E è un gruppo abeliano rispetto ad una legge che chiameremo addizione e se esiste una legge di composizione esterna di (K,E) in E che gode delle seguenti proprietà:

$$a\otimes(\underline{u} \oplus \underline{v}) = a\otimes\underline{u} \oplus a\otimes\underline{v}$$
$$(a + b)\otimes\underline{u} = a\otimes\underline{u} \oplus b\otimes\underline{u}$$
$$a\otimes(b\otimes\underline{u}) = (ab)\otimes\underline{u}$$
$$1\otimes\underline{u} = \underline{u}$$

Gli elementi di E si dicono vettori**.**

Abbiamo segnato con il simbolo ⊕ l'operazione di somma tra vettori e con il simbolo + quella nel corpo K; abbiamo segnato con ⊗ il prodotto tra un elemento di K ed un vettore, mentre abbiamo lasciato, come si fa di solito tra i numeri, ellittico il simbolo del prodotto tra gli elementi di K. *Siccome però non ci sarà pericolo di confusione lasceremo presto cadere la distinzione tra i simboli ed useremo + e · per tutte le somme e le moltiplicazioni, indipendentemente dagli operandi coinvolti .*

L'esempio più comune di vettore è dato da un'ennupla (coppia, terna,...) di numeri. È senza dubbio una struttura dati familiare dall'informatica:

```
var a:array[1..2] of real;
var a:array[1..3] of real;
```

è la definizione di una tale struttura in pascal. In una struttura del genere noi possiamo introdurre una somma

$$(3,5)\oplus(4,3)=(3+4,5+3)=(7,8)$$

che essendo derivata dalla somma tra numeri reali:

a) è associativa
b) ha un elemento neutro (0,0)
c) è commutativa
d) definisce, per ogni vettore, uno simmetrico (o opposto). L'opposto di (a,b) è il vettore (-a,-b).

Si può definire facilmente un prodotto esterno

$$4\otimes(7,2) = (4\times7,\ 4\times2) = (28,8)$$

o in generale $a\otimes(b,c)=(ab,ac)$. È facile verificare, infine, la validità delle proprietà elencate in fase di definizione.

Se vi sembrano delle verifiche inutili, forse non avete riflettuto bene sul significato di ⊕ e + e su quello dei due prodotti ⊗ e *×.*

Esempi di spazi vettoriali: i vettori della fisica con K=R; l'insieme degli angoli con K=R.

Sono però vettori anche la quantità di pane, latte, carne e mele da comperare ogni giorno con K=R; i carboidrati, le proteine e le calorie di ogni pranzo,... che sono tutti dei derivati del cosiddetto spazio vettoriale R^n composto da ennuple di numeri reali.

2 - Qualche esempio

In una famiglia si comperano ogni giorno 2 litri di latte, 5 etti di pane e 200 grammi di carne. Il vettore spesa, che ha tre *componenti,* si può rappresentare così:

$$\underline{s} = (2, 5, 200)$$

o, con una notazione più comune per i vettori,

$$\underline{s}=\begin{pmatrix}2\\5\\200\end{pmatrix}$$

Se un'altra famiglia compera ogni giorno 2 litri di latte. ¾ di chilo di pane e 3 etti di carne, il suo vettore spesa $\underline{s}'$ sarà (attenti alle dimensioni delle grandezze):

$$\underline{s}'=\begin{pmatrix}2\\7,5\\300\end{pmatrix}$$

Se un giorno, una delle due famiglie fa la spesa per tutte e due, la spesa complessiva sarà

$$\underline{s}\oplus\underline{s}'=\begin{pmatrix}2\\5\\200\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}2\\7,5\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2\\5+7,5\\200+300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\12,5\\500\end{pmatrix}$$

Al sabato, se la famiglia fa la spesa per due giorni, dovrà comperare un vettore spesa

$$\underline{s_{sabato}}=2\otimes\underline{s}=2\otimes\begin{pmatrix}2\\5\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2\\2\cdot 5\\2\cdot 200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\10\\400\end{pmatrix}$$

Come si intuisce da questo semplice esempio le proprietà di cui gode un vettore sono molto utili per rappresentare una vastissima classe di problemi.

3 - Combinazioni lineari e basi

Per produrre dei pezzi meccanici abbiamo bisogno di bulloni e dadi. Supponiamo che per produrre un certo pezzo (che chiameremo X) abbiamo bisogno di 2 bulloni e 2 dadi e che per produrne un altro che chiameremo Y occorrano 1 bullone e 2 dadi (dado e controdado). Supponiamo ancora che una certa macchina sia composta da 2 pezzi X e 3 Y. Il numero di bulloni di cui avremo bisogno sarà allora dato dalla seguente espressione:

$$2\otimes\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\oplus 3\otimes\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$$

Il vettore $\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$ si dice combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

In generale diremo che il vettore $\underline{v}$ è combinazione dei vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ...$\underline{v}_n$ se [2]

$$\underline{v} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + ... + a_n\underline{v}_n$$

I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ... $\underline{v}_n$ si dicono *linearmente indipendenti* se nessuno di essi può essere scritto come combinazione lineare dei rimanenti.

In generale, in uno spazio vettoriale R^n possiamo scrivere sempre n vettori che sono linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\...\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\...\\0\end{pmatrix}...\begin{pmatrix}0\\0\\...\\1\end{pmatrix}$$

Se n vettori linearmente indipendenti consentono, con un'opportuna combinazione lineare di generare qualsiasi altro vettore dello spazio vettoriale, diremo che essi sono una *base* dello spazio vettoriale E.

Uno spazio vettoriale può avere più di una base (anzi, in generale ne ha più di una) ma *il numero n di vettori che costituiscono le basi dello spazio è sempre lo stesso*, dipende dal particolare spazio preso in esame e si dice *dimensione* dello spazio vettoriale. La conoscenza di un numero finito di elementi dello spazio vettoriale ci consente di generare, con opportune combinazioni lineari, tutti gli elementi dello spazio.

È opportuno sottolineare che la base (1,0) e (0,1) e le basi analoghe per insiemi di dimensione maggiore (1,0,0,0...), (0,1,0,0...), (0,0,1,0,...) è la più popolare perché molto pratica ma non l'unica. Ripensando alla definizione data si provi a vedere quali delle seguenti coppie di vettori possono essere pensate come basi e quali no:

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}10\\14\end{pmatrix}$$

4 - Applicazioni lineari e matrici

A pranzo possiamo mangiare pasta, carne, pesce, verdura, formaggio, frutta e pane. La quantità di ogni cibo che mangeremo ad ogni pasto è rappresentabile da un vettore le cui componenti indicano, per esempio, i grammi di ogni cibo che assumeremo in quel dato pasto.

[2] Da questo momento in poi rinunciamo alla distinzione tra i simboli delle operazioni tra numeri e quelle tra vettori, in quanto riteniamo che la notazione, a lungo andare possa addirittura essere fonte di confusione.

La dieta equilibrata, come è noto, deve essere costituita da una certa quantità di protidi, lipidi, glucidi e calorie. Potremo rappresentare la situazione in una tabella:

1 g di →	pasta	carne	pesce	verdura	formaggio	frutta	pane
Protidi(g)	0,12	0,20	0,16	0.03	0,30	0,003	0,08
Glucidi(g)	0,73	0	0	0.04	0,01,5	0,14	0,54
Lipidi(g)	0,016	0,10	0,006	0,004	0,297	0,003	0,01
Calorie	3,54	1,70	0,71	0,32	5,60	0,58	2,57

Consideriamo allora un ipotetico pasto fatto di 80 g di pasta, 100 g di carne, 50 g di verdura, 75 g di formaggio, 150 g di frutta e 40 g di pane. Esso potrà venir rappresentato, ricordando che il pesce è 0 con un vettore $\underline{p}$ di sette elementi:

$$\underline{p}=\begin{pmatrix}80\\100\\0\\50\\75\\150\\40\end{pmatrix}$$

Ad ogni pranzo corrisponde una certa dose di lipidi, glucidi, protidi e calorie, in parole povere una certa dieta. Non è difficile accorgersi che *le singole voci della dieta si ottengono moltiplicando i singoli elementi di una riga della tabella per i singoli elementi del vettore pranzo*. Anche la dieta potrà essere vista come un vettore, di 4 elementi. Nel nostro caso sarà

$$\underline{d}=\begin{pmatrix}57,25\\104,125\\34,605\\1079\end{pmatrix}$$

Il primo elemento rappresenta la quantità di protidi mangiati con il pranzo, il secondo i glucidi, il terzo i lipidi ed il quarto le calorie. *Noi possiamo pensare, allora, di aver eseguito una trasformazione da uno spazio vettoriale in un altro, potremmo chiamarlo spazio vettoriale dieta.*

Riflettiamo su questa trasformazione: ad ogni vettore del primo spazio la trasformazione ne fa corrispondere uno ed uno solo del secondo. Siamo allora in presenza di un'applicazione che indicheremo, in generale, con $\underline{d}=\underline{f}(\underline{p})$. Abbiamo sottolineato anche la f per indicare che essa è un'applicazione vettoriale, che ad un vettore fa corrispondere un vettore.

Quest'applicazione gode di 2 proprietà:

1. Se consideriamo due vettori, per esempio, il pranzo e la cena e li sommiamo, troviamo il vettore cibi mangiati nella giornata. Se consideriamo i tre vettori, pranzo cena e pranzo+cena, e andiamo a vedere le loro immagini nello spazio delle diete troviamo, provare per credere, che

   $$f(\underline{p} \oplus \underline{c}) = \underline{f}(\underline{p}) \oplus \underline{f}(\underline{c})$$

   La dieta conseguente al consumo di due pasti distinti è data dalla somma delle diete dei due pasti singoli

2. Se poi ci interessasse la quantità complessiva di protidi, lipidi e calorie coinvolti in un certo numero a di pranzi, potremo verificare che vale la relazione

$$\underline{f}(a\times\underline{p}) = a\times\underline{f}(\underline{p})$$

   La dieta conseguente al consumo di n pasti uguali è data da a volte la dieta di un pasto singolo.

Quando un'applicazione tra due spazi vettoriali gode di queste due proprietà si dice che *l'applicazione è lineare*. Sappiamo, inoltre, dalla classe terza, che la prima delle due proprietà equivale a dire che siamo in presenza di un omomorfismo: tutte le considerazioni fatte per la somma nel primo spazio vettoriale saranno vere anche nel secondo. La seconda proprietà ci garantisce sostanzialmente le stesse cose per il prodotto esterno.

> Riguardate la definizione di omomorfismo. Perché non ho parlato di omomorfismo anche per la seconda proprietà?

5 - Matrice di un'applicazione

Ritorniamo ancora una volta all'esempio. La trasformazione è definita completamente dalla tabella

$$\begin{Vmatrix} 0{,}12 & 0{,}2 & 0{,}16 & 0{,}03 & 0{,}3 & 0{,}003 & 0{,}08 \\ 0{,}73 & 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}015 & 0{,}14 & 0{,}54 \\ 0{,}016 & 0{,}1 & 0{,}006 & 0{,}004 & 0{,}297 & 0{,}003 & 0{,}01 \\ 3{,}54 & 1{,}70 & 0{,}71 & 0{,}32 & 5{,}6 & 0{,}58 & 2{,}57 \end{Vmatrix}$$

Questa tabella viene detta *matrice dell'applicazione*. Possiamo descrivere la funzione mediante una specie di prodotto, nuovo, tra la matrice ed il vettore. Il vettore $\underline{d}$ si ottiene moltiplicando le righe della tabella per il vettore e sommando i risultati tra di loro.

$$\begin{Vmatrix} 0{,}12 & 0{,}2 & 0{,}16 & 0{,}03 & 0{,}3 & 0{,}003 & 0{,}08 \\ 0{,}73 & 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}015 & 0{,}14 & 0{,}54 \\ 0{,}016 & 0{,}1 & 0{,}006 & 0{,}004 & 0{,}297 & 0{,}003 & 0{,}01 \\ 3{,}54 & 1{,}70 & 0{,}71 & 0{,}32 & 5{,}6 & 0{,}58 & 2{,}57 \end{Vmatrix} * \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 0 \\ 50 \\ 75 \\ 150 \\ 40 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}12\cdot 80+0{,}2\cdot 100+0{,}16\cdot 0+0{,}03\cdot 50+0{,}3\cdot 75+0{,}003\cdot 150+0{,}08\cdot 40 \\ 0{,}73\cdot 80+0\cdot 100+0\cdot 0+0{,}04\cdot 50+0{,}015\cdot 75+0{,}14\cdot 150+0{,}54\cdot 40 \\ 0{,}016\cdot 80+0{,}1\cdot 100+0{,}006\cdot 0+0{,}004\cdot 50+0{,}297\cdot 75+0{,}003\cdot 150+0{,}01\cdot 40 \\ 3{,}54\cdot 80+1{,}70\cdot 100+0{,}71\cdot 0+0{,}32\cdot 50+5{,}6\cdot 75+0{,}58\cdot 150+2{,}57\cdot 40 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 57{,}25 \\ 104{,}125 \\ 14{,}605 \\ 1079 \end{pmatrix}$$

Il prodotto, che abbiamo indicato con un *, è così una nuova operazione che ad un vettore e ad una matrice associa un nuovo vettore, ma di uno spazio vettoriale diverso. Poiché, anche in questo caso, non ci sono pericoli di confusione, tralasceremo questo nuovo simbolo ed indicheremo la moltiplicazione come al solito.

L'applicazione lineare può pertanto essere rappresentata da un *prodotto* tra una matrice ed un vettore che dà come risultato un altro vettore. La regola per eseguire questa operazione nuova che abbiamo inventato è più facile a comprendersi dall'esempio che dalle parole e dice:

Il risultato del prodotto di una matrice per un vettore è un altro vettore i cui elementi si ottengono moltiplicando gli elementi delle righe della matrice per gli elementi del vettore e sommando tra loro i risultati dei prodotti.

Dalla regola si comprende che il numero di elementi di una riga di una matrice deve essere eguale al numero di elementi che compongono il vettore, mentre nessuna ipotesi si fa sul numero di righe della matrice stessa. *Il numero di elementi che compongono il vettore prodotto sarà pari al numero di righe della matrice.*

La matrice definisce l'applicazione; data l'applicazione, è definita la matrice che la rappresenta: ad ogni applicazione corrisponde una matrice e ogni matrice rappresenta una particolare applicazione.

Possiamo vedere l'applicazione (e la matrice) come un *operatore* che prende un vettore di un tipo e lo trasforma in un altro.

Le matrici si indicano di solito con lettere maiuscole; gli elementi della matrice con due indici, il primo dei quali indica la riga e il secondo la colonna in cui l'elemento è collocato. Gli studenti sanno già dall'informatica che una matrice è una tabella bidimensionale di elementi. Detta A questa tabella, un generico elemento si indica, a seconda dei linguaggi, con A(I,J) o A[I,J] o A[I][J]. In matematica si preferisce usare la scrittura a_{ij}.

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{matrix}\right\|$$

6 - Esempi di applicazioni (e di matrici) particolari.

Consideriamo l'applicazione di uno spazio vettoriale E' di dimensione k in uno spazio vettoriale E'' esso pure di dimensione k (eventualmente coincidenti). Supponiamo che esista un'applicazione che ad ogni vettore della base di E', $\underline{b}'_i$, faccia corrispondere il vettore $\underline{b}''_i$. E' facile verificare che in questo caso la matrice dell'applicazione è:

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Con la lettera I, in letteratura, si sottintende appunto tale matrice che è nota come *matrice identità* (e *applicazione identica* l'applicazione da essa rappresentata).

Esempio:

Consideriamo l'insieme dei tipi di polizze di assicurazione gestiti da una compagnia. Sia E' lo spazio vettoriale i cui vettori abbiano il significato di "*numero di polizze sottoscritte da un assicurato per ogni tipo*" (per esempio il vettore $\underline{v}$'=(1,0,2,1,0,0,0,....) rappresenterà un assicurato che ha stipulato una polizza del tipo 1, nessuna del tipo 2, 2 del tipo 3, 1 del tipo 4, nessuna dei tipi 5, 6, 7 e così via). Supponiamo che la compagnia abbia predisposto, per ogni tipo di polizza, un modulo diverso da sottoscrivere. Allora il vettore $\underline{v}$"=(1,0,2,1,0,0,0,....) rappresenta il numero di moduli di ogni tipo che l'assicurato ha firmato. L'applicazione f(E')->E'' per la quale $\underline{v}$''=f($\underline{v}$') è descritta da una matrice del tipo I.

7 - Matrici rettangolari e quadrate

Vale la pena soffermarci ancora un attimo sull'esempio delle diete: la dimensione dello spazio pranzi è diversa da quella dello spazio diete. La matrice che opera la trasformazione da uno spazio ad un altro è una matrice *rettangolare,* in quanto il numero di righe è diverso dal numero di colonne. In generale, *una matrice che rappresenta la trasformazione da uno spazio E' ad uno spazio E" avrà un numero di righe pari alla dimensione dello spazio E" e un numero di colonne pari alla dimensione dello spazio E'.*

Quando una matrice ha lo stesso numero di righe e di colonne, vale a dire quando gli spazi hanno la stessa dimensione, essa si dice *quadrata.* Le matrici quadrate, come vedremo più avanti, godono di alcune proprietà particolari.

8 - Matrice diagonale

Una ditta produce acque minerali, bitter e aranciate. Le bottiglie di acqua minerale vengono confezionate in casse da 12, i bitter in pacchetti da 3 e le aranciate in scatole da 16. La matrice dell'applicazione dello spazio vettoriale bottiglie in quello confezioni sarà (lo si verifichi):

$$A = \begin{Vmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{Vmatrix}$$

Una matrice di questo tipo si dice *diagonale* in quanto solo gli elementi della diagonale principale (quella che va da in alto a sinistra a in basso a destra) sono diversi da 0.

9 - Matrice inversa

Data un'applicazione di uno spazio E' in uno spazio E” si può, se questa applicazione è *biiettiva*, considerare l'applicazione inversa di E” in E'. La matrice che la rappresenta si dice inversa. Se A è la matrice della prima applicazione, l'inversa si indica, di solito, con A^{-1}. Il calcolo di una matrice inversa non è semplice e il metodo verrà esposto più avanti.

È invece semplice da calcolare l'inversa della matrice A del paragrafo precedente. Essa sarà:

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{Vmatrix}$$

ma non si tragga una regola generale da questo esempio!

10 - Composizione di applicazioni

Consideriamo il seguente problema:

> *Per costruire un certo prodotto meccanico una ditta ha bisogno di 10 viti e 20 dadi per ogni pezzo. In commercio si trovano confezioni da 50 viti e 50 dadi (confezioni di tipo 1) e confezioni di 100 dadi (confezioni di tipo 2). Nel negozio A la confezione di tipo 1 costa 2,50 € e 2,40 € quella di tipo 2. Nel negozio B i costi sono invece di 2,60 € e 2,30 € rispettivamente. Dovendo produrre x pezzi di questo prodotto meccanico si chiede di determinare in quale negozio converrà effettuare gli acquisti.*

Alla luce delle conoscenze acquisite notiamo che l'esercizio propone tre spazi vettoriali, E' i cui elementi sono insiemi di viti e dadi, E'' i cui elementi sono il numero di scatolette di un tipo e di un altro ed E''' dei costi nei due negozi. I tre spazi sono collegati tra di loro da alcune applicazioni lineari rappresentate dallo schema riportato a fianco .

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f_1"'] \arrow[rr, bend left, "f_3"] & E'' \arrow[r, "f_2"'] & E''' \end{tikzcd}$$

Dal terzo anno di corso noi possiamo pensare all'applicazione f_3 come all'applicazione composta di f_1 e f_2: $f_3 = f_2 \circ f_1$.

Esaminiamo la composizione delle applicazioni in termini matriciali. Siano v e d le viti ed i dati di cui abbiamo bisogno, S_1 ed S_2 le scatolette ed L_a ed L_b i costi (espressi in Euro).

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}=\begin{Vmatrix} c_{1v} & c_{1d} \\ c_{2v} & c_{2d} \end{Vmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v \\ d \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} L_a \\ L_b \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} d_{a1} & d_{a2} \\ d_{b1} & d_{b2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

dove la formula (1) rappresenta l'applicazione f_1 e la formula (2) rappresenta la f_2. In quest'ultima relazione il vettore (S_1,S_2) può venir scritto usando la relazione (1)

$$\begin{pmatrix} L_a \\ L_b \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} d_{a1} & d_{a2} \\ d_{b1} & d_{b2} \end{Vmatrix} \cdot \left(\begin{Vmatrix} c_{1\mathrm{v}} & c_{1\mathrm{d}} \\ c_{2\mathrm{v}} & c_{2\mathrm{d}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ d \end{pmatrix} \right) \qquad (3)$$

L'applicazione f_3 sarà, invece, descritta da una formula del tipo:

$$\begin{pmatrix} L_a \\ L_b \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} e_{av} & e_{ad} \\ e_{bv} & e_{bd} \end{Vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ d \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Se ne deduce che dovrebbe essere possibile inventare una nuova operazione, questa volta tra matrici, che chiameremo *prodotto*, in base alla quale, date due matrici che rappresentano due applicazioni componibili tra di loro, è possibile ricavare la terza matrice che rappresenta l'applicazione composta.

Da un punto di vista formale si tratta di rendere equivalenti le scritture (si noti bene il diverso raggruppamento delle matrici evidenziato dalle parentesi.

$$\begin{pmatrix} L_a \\ L_b \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} d_{a1} & d_{a2} \\ d_{b1} & d_{b2} \end{Vmatrix} \cdot \left(\begin{Vmatrix} c_{1\mathrm{v}} & c_{1\mathrm{d}} \\ c_{2\mathrm{v}} & c_{2\mathrm{d}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ d \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{Vmatrix} d_{a1} & d_{a2} \\ d_{b1} & d_{b2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} c_{1\mathrm{v}} & c_{1\mathrm{d}} \\ c_{2\mathrm{v}} & c_{2\mathrm{d}} \end{Vmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} v \\ d \end{pmatrix}$$

Vediamo come possiamo, date due matrici, introdurne una terza, che chiameremo prodotto e che consenta di passare dalla formula (3) alla (4).

Le matrice C e D sono, in base ai dati del problema,

$$C = \begin{Vmatrix} \frac{1}{50} & 0 \\ \frac{-1}{100} & \frac{1}{100} \end{Vmatrix} \qquad D = \begin{Vmatrix} 2{,}50 & 2{,}40 \\ 2{,}60 & 2{,}30 \end{Vmatrix}$$

Dalle formule (3) e (4) noi possiamo dedurre quali sono gli elementi e_{ij} e cercare quali sono le relazioni che li legano agli elementi delle matrici iniziali.

$$\begin{Vmatrix} 2{,}50 \cdot \frac{1}{50} - 2{,}40 \cdot \frac{1}{100} & 2{,}50 \cdot 0 + 2{,}40 \cdot \frac{1}{100} \\ 2{,}60 \cdot \frac{1}{50} - 2{,}30 \cdot \frac{1}{100} & 2{,}60 \cdot 0 + 2{,}30 \cdot \frac{1}{100} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2{,}50 & 2{,}40 \\ 2{,}60 & 2{,}30 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{50} & 0 \\ \frac{-1}{100} & \frac{1}{100} \end{Vmatrix}$$

La prima matrice è stata ottenuta dalla relazione (3) riportando i calcoli che sono stati lasciati, però, indicati. Notiamo come essa possa essere ottenuta *moltiplicando le righe della matrice di sinistra per le colonne delle matrici di destra e poi sommando i fattori.* Abbiamo, cioè, inventato una nuova operazione (ancora una! state tranquilli che non sarà l'ultima) che chiameremo prodotto di matrici. Essa ci consente di eliminare la parentesi della formula (3) e scrivere, semplicemente:

$$\begin{Vmatrix} d_{a1} & d_{a2} \\ d_{b1} & d_{b2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} c_{1\text{v}} & c_{1\text{d}} \\ c_{2\text{v}} & c_{2\text{d}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} e_{av} & e_{ad} \\ e_{bv} & e_{bd} \end{Vmatrix} \qquad (5)$$

Consideriamo ora due generiche matrici (per semplicità le prenderemo quadrate e di dimensione 3):

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}$$

Allora la matrice prodotto A × B sarà

$$A \cdot B = \begin{Vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{Vmatrix}$$

Qualora le matrici non fossero state quadrate si sarebbe potuto comunque eseguire il prodotto a patto che *il numero di colonne della prima matrice fosse eguale al numero di righe della seconda.* In generale per eseguire il prodotto dobbiamo avere una matrice A di dimensione (m, k), una matrice B di dimensione (k, n) e la matrice prodotto A ×B avrà dimensione (m, n). Da queste considerazioni, segue che questo prodotto, in generale, *non gode della proprietà commutativa* mentre *gode della proprietà associativa* (che però è noioso verificare).

Pertanto, nell'insieme delle matrici quadrate di dimensione n fissata questo prodotto definisce una struttura algebrica di *semigruppo non abeliano.*

Poiché inoltre è facile constatare l'esistenza di un elemento neutro (la matrice I) siamo in presenza di un *monoide non abeliano.*

11 - Un altro prodotto

Consideriamo il problema di una massaia che deve acquistare 6 etti di pane, 2 litri di latte, 3 etti di carne, un chilo di mele. Può acquistare questi prodotti in tre supermercati della zona. Per sua comodità, una volta deciso a quale supermercato rivolgersi, ci va e vi acquista tutta la spesa e non parte in uno e parte in un altro.

La spesa è rappresentabile come un vettore:

$$\begin{array}{l} \text{pane in kg} \\ \text{latte in litri} \\ \text{carne in kg} \\ \text{mele in kg} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 2 \\ 0{,}3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La tabella dei prezzi si può scrivere come una matrice

	pane	latte	carne	mele
Supermercato 1	3,00	1,30	18	3,50
Supermercato 2	3,20	0,99	20,00	3,80
Supermercato 3	3,10	1,20	19,00	4,00

La matrice proposta trasforma il vettore cose da acquistare nel vettore soldi che si spendono nei tre supermercati. Lo si verifichi.

Supponiamo ora che per qualche motivo i prezzi aumentino del 10% (vuol dire che tutti i prezzi andranno moltiplicati per 1.1). Possiamo introdurre allora una nuova operazione (il prodotto di un numero per una matrice).La regola che definisce questo prodotto (la si deduca dall'esempio) è riportata qui sotto:

$$B=1{,}1\cdot A=1{,}1\cdot\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 1{,}1\cdot a_{11} & 1{,}1\cdot a_{12} & \dots & 1{,}1\cdot a_{1,n-1} & 1{,}1\cdot a_{1\mathrm{n}} \\ 1{,}1\cdot a_{21} & 1{,}1\cdot a_{22} & \dots & 1{,}1\cdot a_{2,n-1} & 1{,}1\cdot a_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1{,}1\cdot a_{m-1,1} & 1{,}1\cdot a_{m-1,2} & \dots & 1{,}1\cdot a_{m-1,n-1} & 1{,}1\cdot a_{m-1,n} \\ 1{,}1\cdot a_{m,1} & 1{,}1\cdot a_{m,2} & \dots & 1{,}1\cdot a_{m,n-1} & 1{,}1\cdot a_{m,n} \end{Vmatrix}$$

Questa è una legge di composizione esterna che *definisce nell'insieme delle matrici di data dimensione $n\times m$ insieme alla somma tra matrici che introdurremo tra poco, la struttura di uno spazio vettoriale.* Poiché, però, siamo ormai a corto di simboli per indicare i vari prodotti e le varie somme, da questo momento useremo un solo simbolo per il prodotto e uno solo per l'addizione. Sarà il contesto (due vettori, un vettore ed un numero, e così via) ad indicare di quale prodotto si tratti.

12 - Un'ultima operazione tra matrici: la somma.

E' difficile che si realizzi un aumento dei prezzi del 10% eguale per tutti (potrebbe essere tutt'al più il caso dei prezzi con IVA e senza IVA). È più facile invece che ci siano delle variazioni di prezzo che dipendono da prodotto a prodotto, da supermercato a supermercato. Potremmo riassumere la situazione in questo modo:

– matrice dei prezzi iniziali: $A=\begin{Vmatrix} 3{,}00 & 1{,}30 & 18{,}00 & 3{,}50 \\ 3{,}20 & 1{,}13 & 20{,}00 & 3{,}80 \\ 3{,}10 & 1{,}20 & 19{,}00 & 4{,}00 \end{Vmatrix}$

– matrice degli aumenti: $B=\begin{Vmatrix} 0{,}00 & 0{,}10 & 0{,}00 & 0{,}25 \\ 0{,}00 & 0{,}15 & 1{,}00 & 0{,}50 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & -1{,}00 & 0{,}60 \end{Vmatrix}$

– matrice dei nuovi prezzi: $C=A+B=\begin{Vmatrix} 3{,}00 & 1{,}40 & 18{,}00 & 3{,}75 \\ 3{,}20 & 1{,}20 & 20{,}00 & 4{,}30 \\ 3{,}10 & 1{,}30 & 18{,}00 & 4{,}60 \end{Vmatrix}$

Da queste tre matrici è abbastanza semplice introdurre l'operazione *somma di matrici*: A + B = C

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{Vmatrix}$$

$$B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1\mathrm{n}} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m-1,1} & b_{m-1,2} & \dots & b_{m-1,n-1} & b_{m-1,n} \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n-1} & b_{m,n} \end{Vmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1,n-1}+b_{1,n-1} & a_{1\mathrm{n}}+b_{1\mathrm{n}} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2,n-1}++b_{2,n-1} & a_{2\mathrm{n}}+b_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1}+b_{m-1,1} & a_{m-1,2}+b_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,n-1}+b_{m-1,n-1} & a_{m-1,n}+b_{m-1,n} \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \dots & a_{m,n-1}+b_{m,n-1} & a_{m,n}+b_{m,n} \end{Vmatrix}$$

È evidente che per poter eseguire l'operazione di somma testé descritta le matrici devono avere lo stesso numero di righe m e lo stesso numero di colonne n.

È, quindi, una legge di composizione interna che gode delle proprietà associativa e commutativa poiché tali proprietà valgono per la somma tra i numeri reali.

A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C   proprietà associativa

A + B = B + A   proprietà commutativa

La matrice i cui elementi sono tutti 0 è la cosiddetta matrice nulla che viene talvolta indicata con la lettera O e che è l'elemento neutro per la somma.

Data la matrice A definiamo come matrice -A la matrice che si ottiene moltiplicando per -1 la matrice A.

-A = -1 × A

E' evidente che A + (-A) = O.

Pertanto l'operazione di addizione definisce nell'insieme delle matrici di dati numero di righe m e numero di colonne n una struttura algebrica di gruppo abeliano.

13 - L'anello delle matrici quadrate di ordine n

Per poter eseguire tra due matrici sia la somma che il prodotto esse devono essere quadrate. In tal caso non è difficile, ma noioso, dimostrare che vale la proprietà distributiva:

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$

In questo modo abbiamo definito una struttura algebrica di anello. Poiché il prodotto tra matrici non è abeliano l'anello non è abeliano. Questo anello, inoltre, non è un *dominio di integrità* (vale a dire che esistono dei *nullifici*). Eccone un esempio nel caso (per semplicità) di matrici 2 × 2:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Si provi, per esercizio, a trovare esempi di dimensione diversa a quella 2.

Non sarà quindi valida, in generale, la *legge di annullamento del prodotto*.